**ĐẶT VẤN ĐỀ**

**1. Lí do chọn đề tài**

Đổi mới phương pháp dạy học với mục đích chính là phát huy tính tích cực chủ động của học sinh, khơi dậy và phát triển khả năng tự học của học sinh. Hình thành cho học sinh tư duy tích cực, độc lập sáng tạo, nâng cao năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề. Từ nhu cầu nhận thức sẽ hình thành động cơ thúc đẩy quá trình học tập tự giác, tích cực và tự lực trong học tập để chiếm lĩnh tri thức. Những thành quả đạt được sẽ tạo niềm hứng thú, say mê học tập, nhờ đó mà những kiến thức sẽ trở thành “tài sản riêng” của các em. Học sinh không những nắm vững, nhớ lâu mà còn biết vận dụng tốt những tri thức đạt được để giải quyết những vấn đề nảy sinh trong học tập, trong thực tế cuộc sống và lao động mai sau. Đồng thời, học sinh có phương pháp học trên lớp học và phương pháp tự học để đáp ứng được sự đổi mới thường xuyên của khoa học công nghệ ngày nay.

Trong quá trình dạy học bộ môn Toán, việc cung cấp kiến thức, rèn luyện kĩ năng để học sinh hình thành cách giải một dạng toán là việc làm rất quan trọng, người dạy và người học cần phải tạo ra cho mình một thói quen là: Sau khi đã tìm được lời giải bài toán, dù là đơn giản hay phức tạp, cần tiếp tục suy nghĩ, lật lại vấn đề để tìm kết quả mới hơn. Tìm được cái mới hơn rồi, lại tiếp tục đi tìm cái mới hơn nữa hoặc đi tìm mối liên hệ giữa các vấn đề, . . . cứ như thế chúng ta sẽ tìm ra được những kết quả thú vị.

Với vai trò quan trọng của bộ môn, với quan điểm dạy học phải nhằm phát huy tính tích cực, độc lập sáng tạo của học sinh, dựa vào đặc điểm lứa tuổi học sinh việc giáo viên xây dựng những hệ thống câu hỏi, tìm lời giải bài toán hình học cùng với việc khai thác những bài toán tương tự sẽ giúp học sinh tiếp thu kiến thức hình học tự nhiên hơn, kích thích tính tò mò, thích khám phá của học sinh từ đó học sinh hiểu và biết cách chứng minh hình học.

Chuyên đề ***“Phát triển tư duy học sinh từ một bài tập hình học”*** được nghiên cứu và đúc rút trong quá trình giảng dạy trên lớp, bồi dưỡng học sinh giỏi và ôn thi vào THPT. Khi giảng dạy hay bồi dưỡng nếu ta chỉ hướng dẫn học sinh giải các bài tập riêng lẻ thì học sinh rất nhanh quên và có phần không hứng thú nhiều. Thay vào đó để phát triển tư duy cho học sinh sau khi hướng dẫn học sinh tìm lời giải của một bài toán tôi thường đặt ra câu hỏi cho học sinh như: Có còn cách giải khác không? Bài toán này có liên quan đến bài toán nào đã học không? Tổng quát hay đặc biệt hóa một số yếu tố ta được kết quả như thế nào? Vẽ thêm một số yếu tố phụ ta được kết quả như thế nào? … Và tôi thực hiện theo những hướng đó thì thấy học sinh có hứng thú hơn, hiểu bài hơn, khi gặp lại học sinh biết liên hệ và nắm được những bài toán cùng dạng.

**2. Mục đích, đối tượng, phạm vi, phương pháp nghiên cứu và điểm mới của đề tài.**

**2.1. Mục đích của đề tài**

- Chuyên đề nhằm rèn luyện cho học sinh tư duy sáng tạo khi học và giải bài tập hình học.

- Biết cách định hướng những kiến thức môn học vào giải bài tập và giải bài tập ngắn gọn, chính xác.

- Phát huy trí lực của học sinh tìm nhiều cách giải hay phát triển bài tập mới.

- Giúp học sinh tự tin khi giải bài tập hình học hoặc trong thi cử.

Dựa trên cơ sở lí luận và thực tiễn tôi đặt ra nhiệm vụ của vấn đề là tiến hành khảo sát, thực nghiệm, kiểm tra, đánh giá kết quả thực nghiệm, chuyển tải những chuyên đề mà tôi đã nghĩ ra trong quá trình giảng dạy để giúp học sinh lớp 9 giải bài tập hình học và biết phát triển từ những bài tập để đạt kết quả cao nhất. Góp phần nâng cao chất lượng đội tuyển học sinh giỏi toán và cũng là cách góp phần nâng cao chất lượng học sinh thi vào THPH của trường, của huyện.

**2.2. Đối tượng nghiên cứu:** Học sinh lớp 8, 9.

**2.3. Phạm vi nghiên cứu:** Chương trình hình học lớp 8, 9.

**2.4. Phương pháp nghiên cứu**

**2.4.1. Phương pháp nghiên cứu lí thuyết.**

Dựa vào tài liệu tham khảo các đề thi học sinh giỏi, thi vào THPT ... tôi đã nghiên cứu và chọn lọc ra những nội dung có liên quan bổ sung cho sáng kiến của mình. Sau đó tôi trình bầy theo một trật tự nhất định để đảm bảo sự logic.

**2.4.2. Phương pháp điều tra, thống kê thực tế, thực nghiệm, so sánh đối chiếu.**

Điều tra thực trạng học và làm bài tập của học sinh bằng bài tập khảo sát, thống kê về đề thi, phân tích nguyên nhân của thực trạng làm cơ sở đề xuất các biện pháp áp dụng. Tiến hành dạy thực nghiệm và làm đối chứng. Sau đó thống kê, rồi đem ra so sánh, đối chiếu để đi đến kết luận: cùng là một đối tượng học sinh nhưng khi áp dụng sáng kiến có kết quả như thế nào so với khi không áp dụng sáng kiến.

**2.5. Điểm mới của đề tài.**

Chuyên đề được trình bầy theo các hướng khai thác, phát triển bài toán khác nhau. Hiện nay, trong dạy học anh chị em giáo viên đã đề cập tới vấn đề này nhưng chưa thực hiện theo trình tự và thường xuyên mà phần nhiều là thực hiện giải bài tập hình học.

**3. Cơ sở lí luận của vấn đề**

Đặc điểm của lứa tuổi học sinh THCS là muốn vươn lên làm người lớn, muốn tự mình khám phá, tìm hiểu trong quá trình nhận thức. Các em có khả năng điều chỉnh hoạt động học tập, sẵn sàng tham gia các hoạt động học tập khác nhau nhưng cần phải có sự hướng dẫn, điều hành một cách khoa học và nghệ thuật của thầy, cô giáo. Hình thành và phát triển tư duy tích cực, độc lập, sáng tạo cho HS là một quá trình lâu dài.

3.1. Tư duy tích cực, độc lập sáng tạo của HS được thể hiện ở một số mặt sau:

+ Biết tìm ra phương pháp nghiên cứu giải quyết vấn đề, khắc phục các tư tưởng rập khuôn, máy móc.

+ Có kĩ năng phát hiện những kiến thức liên quan với nhau, nhìn nhận một vấn đề ở nhiều khía cạnh.

+ Có óc hoài nghi, luôn đặt ra các câu hỏi: Tại sao? Do đâu? Liệu có cách nào khác nữa không? Các trường hợp khác thì kết luận còn đúng hay không? …

+ Tính độc lập còn thể hiện ở chỗ biết nhìn nhận vấn đề và giải quyết vấn đề.

+ Có khả năng khai thác một vấn đề mới từ những vấn đề đã quen biết.

3.2. Khai thác, phát triển kết quả một bài toán nói chung có nhiều hướng như:

+ Nhìn lại toàn bộ các bước giải. Rút ra phương pháp giải một loại toán nào đó. Rút ra các kinh nghiệm giải toán.

+ Tìm thêm các cách giải khác.

+ Khai thác thêm các kết quả có thể có được của bài toán như tổng quát hay đặc biệt hóa bài toán hoặc một số yếu tố của bài toán, vẽ thêm hình, đề xuất các bài toán mới ...

**4. Thực trạng của vấn đề**

Thực tế cho thấy học sinh THCS nói chung thường rất sợ môn Hình học, học sinh thường rất lúng túng trước vấn đề cần chứng minh, không biết làm gì, bắt đầu từ đâu, đi theo hướng nào. Không biết liên hệ những điều bài đã cho với những kiến thức đã học. Suy luận hình học chưa chặt chẽ, khả năng trình bày còn nhiều thiếu sót, kĩ năng vẽ hình còn yếu. Qua quá trình công tác giảng dạy, tôi thấy:

- Đa số học sinh, sau khi tìm được một lời giải đúng cho bài toán thì các em hài lòng và dừng lại, mà không tìm lời giải khác, không khai thác thêm bài toán, không sáng tạo gì thêm nên không phát huy hết tính tích cực, độc lập, sáng tạo của bản thân.

- Học sinh còn học vẹt, làm việc rập khuôn, máy móc. Từ đó dẫn đến làm mất đi tính tích cực, độc lập, sáng tạo của bản thân.

- Học sinh yếu toán nói chung và yếu hình học, đặc biệt là yếu về phân tích tìm lời giải bài toán hình học nói riêng chủ yếu là do kiến thức còn hổng, lại lười học, lười suy nghĩ, lười tư duy trong quá trình học tập.

- Không ít học sinh thực sự chăm học nhưng chưa có phương pháp học tập phù hợp, chưa tích cực chủ động chiếm lĩnh kiến thức nên hiệu quả học tập chưa cao.

- Học không đi đôi với hành, làm cho bản thân học sinh ít được củng cố, khắc sâu kiến thức, ít được rèn luyện kĩ năng để làm nền tảng tiếp thu kiến thức mới, do đó năng lực cá nhân không được phát huy hết.

- Một số giáo viên chưa thực sự quan tâm đến việc khai thác, phát triển, sáng tạo bài toán trong các tiết dạy nói riêng cũng như trong công tác dạy học nói chung.

- Việc chuyên sâu một vấn đề nào đó, liên hệ được các bài toán với nhau, phát triển một bài toán sẽ giúp cho học sinh khắc sâu được kiến thức. Quan trọng hơn là nâng cao được tư duy cho các em học sinh, giúp các em có hứng thú hơn khi học toán.

Trước thực trạng trên đòi hỏi phải có các giải pháp trong phương pháp dạy và học sao cho phù hợp.

**5. Giải pháp, biện pháp thực hiện**

Qua những bài toán mà học sinh đã giải được, tôi định hướng cho các em tư duy, tập trung nghiên cứu thêm về lời giải, về kết quả bài toán đó. Bằng các hình thức như:

- Kiểm tra kết quả. Xem xét lại các lập luận.

- Nghiên cứu, tìm tòi, . . . với việc tập trung giải quyết các vấn đề như: Liệu bài toán còn có cách giải khác hay không? Bài toán đã cho có liên quan với các bài toán nào khác không? Lật ngược vấn đề. Đặc biệt hóa một số yếu tố. Vẽ thêm hình ...

Trong chuyên đề này, tôi xin minh hoạ bằng cách khai thác, phát triển từ hai bài toán quen thuộc hình học lớp 9 và một bài tập hình học lớp 8 áp dụng kiến thức về tính chất của tỉ lệ thức: . Nhằm giúp học sinh thấy được cái hay, cái đẹp, sự thú vị trong học toán nói chung và trong học hình học nói riêng. Từ đó, giúp học sinh tự tin, tích cực, sáng tạo hơn trong học toán; giúp học sinh thêm yêu thích, nâng cao chất lượng, kết quả học tập môn toán.

**I. PHẦN I: Phát triển tư duy học sinh từ một bài tập hình học lớp 9**

|  |  |
| --- | --- |
| **1. Bài toán 1: Bài 22 (SGK - Trang 76).**  Trên đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Chứng minh rằng ta luôn có: MA2 = MB.MC. |  |

*Sử dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ta có lời giải bài toán như sau:*

Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và  (AC là tiếp tuyến của đường tròn).

Xét  vuông tại A, AM là đường cao nên MA2 = MB.MC.

*Nếu dừng lại ở đây thì bài toán thật đơn giản và như thế thì bộ môn hình học sẽ mất đi cái hay, cái thú vị, việc học hình sẽ trở lên nhàm chán, không phát huy hết tính sáng tạo của học sinh. Ta cùng đi tìm cái hay đằng sau bài toán này.*

*Gọi N là trung điểm của AC. Ta có bài toán sau:*

**1.1. Bài toán 1.1:**

|  |  |
| --- | --- |
| Trên đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Gọi N là trung điểm của AC. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (O). |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

Xét  vuông tại M có MN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC. Do đó .

Từ đó ta có  (c.c.c) 

Do đó MNOM tại M. Suy ra MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

*Từ bài toán trên, đảo lại vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, tiếp tuyến này cắt AC tại N. Từ đó ta có bài toán sau:*

**1.2. Bài toán 1.2:**

|  |  |
| --- | --- |
| Trên đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, tiếp tuyến này cắt AC tại N. Chứng minh N là trung điểm của AC. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

Ta có NA = NM (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) (1)

Do đó  cân tại N 

Mà ; 

Suy ra hay  cân tại N.

 (2)

Từ (1) và (2)  hay N là trung điểm của AC.

*Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, tiếp tuyến này cắt đường thẳng AM tại D. Gọi K là trung điểm của BD. Ta cũng chứng minh được MK là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M. Do đó 3 điểm N, M, K thẳng hàng. Ngược lại, vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, tiếp tuyến này cắt đường thẳng BD tại K, ta cũng chứng minh được K là trung điểm của BD. Từ đó ta có bài toán như sau:*

**1.3. Bài toán 1.3:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho đường tròn (O; R), đường kính AB. Gọi M là một điểm thuộc đường tròn (M khác A, B). Vẽ tiếp tuyến Ax, By (cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm M) của đường tròn (O). Đường thẳng BM cắt Ax tại C, đường thẳng AM cắt By tại D. Vẽ tiếp tuyến tại M của đường tròn, tiếp tuyến này cắt Ax, By lần lượt tại N và K.  a) Chứng minh NOAM.  b) Chứng minh OA2 = AN.BK.  c) Tính chu vi và diện tích tứ giác ANKB khi CN = 4cm, DK = 9cm.  d) Tìm vị trí của M để AC + BD đạt giá trị nhỏ nhất. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Ta có NA và NM là hai tiếp tuyến của (O)

 NA = NM (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà OA = OM = R

 ON là trung trực của AM (dấu hiệu nhận biết đường trung trực)

 NOAM (định nghĩa đường trung trực của đoạn thẳng)

b) Ta có NA và NM là hai tiếp tuyến của (O)

 ON là phân giác của  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự: KB = KM, OK là phân giác của góc 

Mà  và  là hai góc kề bù suy ra ONOK hay 

 vuông tại O.

Lại có OM là đường cao (OM vuông góc với NK)

 (hệ thức về cạnh và đường cao)

Do NA = NM, KB = KM, OA = OM  (1)

c) Ta có: NA = NM = NC = 4cm (kết quả bài trên)

Tương tự có KB = KM = KD = 9cm

Từ (1) 

Chu vi tứ giác ANKB là:

AB + AN + NM + MK + KB = 12 + 4 + 4 + 9 + 9 = 38 (cm)

Vì AN//BK (cùng vuông góc với AB) nên tứ giác ANKB là hình thang vuông.

Do đó diện tích tứ giác ANKB là:



d) Ta có ABC BDA (g.g)

  (không đổi)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: 

Dấu “=” xảy ra khi AC = BD, khi đó M là điểm chính giữa của nửa đường tròn dường kính AB.

*Gọi P là giao điểm của ON và AM, Q là giao điểm của OK và BM. Ta còn có thể yêu cầu học sinh chứng minh PQ//AB và tìm vị trí của điểm M để chu vi và diện tích tứ giác ANKB nhỏ nhất.*

*Trở lại bài toán gốc ta còn suy ra được BM.BC = AB2 = (2R)2 = 4R2 (R là bán kính đường tròn (O)). Ta thấy BM.BC không đổi, khi đó áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có bài toán sau:*

**1.4. Bài toán 1.4:**

|  |  |
| --- | --- |
| Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C.  a) Chứng minh BM.BC = AB2 = (2R)2 = 4R2  b) Xác định vị trí điểm M để 2BM + BC đạt giá trị nhỏ nhất. |  |

*Lời giải:*

a) Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và  (AC là tiếp tuyến của đường tròn).

Xét  vuông tại A, AM là đường cao nên BM.BC = AB2.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:



Dấu “=” xảy ra khi 2BM = BC hay 

Suy ra M là trung điểm của BC. Khi đó  vuông cân tại A.

Từ đó suy ra được M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

*Khi M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O). Lấy N là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AM. Trên tia đối của tia NB lấy điểm K sao cho NK = AN. Ta được bài toán như sau:*

**1.5. Bài toán 1.5:**

Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Lấy điểm N thuộc cung nhỏ AM, trên tia đối của tia NB lấy K sao cho NK = AN.

a) Chứng minh tứ giác AKCB nội tiếp.

b) Xác định vị trí của điểm N để NA + NB đạt giá trị lớn nhất.

|  |  |
| --- | --- |
| *Lời giải:*  a) Vì M là điểm chính giữa của nửa đường tròn nên ta có tam giác AMB vuông cân tại M. Suy ra  hay .  Lại có AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A .  Do đó tam giác ABC vuông cân tại A .  Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) |  |



Suy ra  vuông cân tại N.

Xét tứ giác AKCB có hai đỉnh kề nhau K và C cùng nhìn cạnh AB dưới một góc 450. Do đó tứ giác AKCB nội tiếp.

b) Ta có tứ giác AKCB nội tiếp .

 vuông tại K 





Lại có tam giác ABC vuông cân tại A 

Vậy NA + NB đạt giá trị lớn nhất bằng  khi NM.

*Khi M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O). Lấy N là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BM. Trên tia AM lấy điểm K sao cho AK = BN và cho ẩn điểm C. Ta được bài toán hay và khó như sau:*

**1.6. Bài toán 1.6:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O). Lấy N là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BM. Trên tia AM lấy điểm K sao cho AK = BN. Chứng minh:  a) Tam giác AKM bằng tam giác BNM.  b) Tam giác MKN vuông cân.  c) Khi N chuyển động trên cung BM thì đường vuông góc với AN kẻ từ K luôn đi qua một điểm cố định. |  |

*Lời giải:*

a) Ta có M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O)  .

Xét  và  có:

AM = BM (chứng minh trên)

 (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MN)

AK = BN (GT)

Suy ra  =  (c.g.c)

b) Ta có  =   MK = MN (1) và 

Ta lại có 

Suy ra  hay  (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác MKN vuông cân tại M.

c) Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, tiếp tuyến này cắt đường vuông góc với AN kẻ từ K tại C.

Ta có tam giác MKN vuông cân tại M  

Từ đó ta có 

Xét tứ giác ACMK có hai đỉnh A và K kề nhau cùng nhìn cạnh CM dưới một góc 450. Do đó tứ giác ACMK nội tiếp.

Suy ra  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Khi đó ta có   3 điểm B, M, C thẳng hàng.

Khi đó tam giác ABC vuông cân tại A  AC = AB (không đổi)

Mà tiếp tuyến AC của đường tròn (O) tại A cố định, AC = AB (không đổi)

Suy ra C là điểm cố định. Vậy khi N chuyển động trên cung BM thì đường vuông góc với AN kẻ từ K luôn đi qua điểm C cố định.

*Tiếp tục khai thác bài toán gốc, vẽ đường kính thứ hai vuông góc với đường kính AB. Ta có bài toán sau:*

**1.7. Bài toán 1.7:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho đường tròn (O) đường kính AB, M là một điểm trên đường tròn (M khác A,B, MA < MB). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt đường thẳng BM tại C. Đường kính vuông góc với AB cắt BM tại N.  a) Chứng minh rằng tứ giác AMNO là tứ giác nội tiếp.  b) Chứng minh rằng .  c) Chứng minh rằng BM.BN không đổi khi điểm M thay đổi trên đường tròn (O) (với MA < MB). |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Ta có ON  AB 

 (góc nội tiếp chắn đường tròn)

Xét tứ giác AMNO có  = 1800 nên tứ giác AMNO nội tiếp đường tròn.

b) Xét tam giác MOB có OM = OB = R MOB cân tại O  (1)

Vì AC là tiếp tuyến của đường tròn (O). Nên sđ (2)

Từ (1) và (2) .

c) Ta có  (2 góc nội tiếp cùng chắn ).

Xét BOM và BNA có  chung;  (cmt)

BOM BNA (g.g)



Mà AB.BO không đổi nên BM.BN không đổi.

Vậy BM.BN không đổi khi điểm M thay đổi trên đường tròn (O)

*Tiếp tục khai thác kết quả bài toán gốc MB.MC = MA2, ta cho MA = R. Ta có bài toán sau:*

**1.8. Bài toán 1.8:**

Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Xác định vị trí điểm M để *MB.MC = R2*.

|  |  |
| --- | --- |
| Ta có MB.MC = MA2  Để MB.MC = R2 MA2 = R2  MA = R. |  |

*Khi đó OAM là tam giác đều, suy ra . Ta cũng có thể phát biểu bài toán trên theo cách khác như sau: Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Xác định vị trí điểm M để .*

*Cũng với cách khai thác trên ta có các bài toán tương tự như sau:*

***Bài toán 1.8.1:*** *Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Xác định vị trí điểm M để MB = 3MC.*

***Bài toán 1.8.2:*** *Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Xác định vị trí điểm M để MB.MC = 3R2 ().*

*Ta lại có  (không đổi).*

*Do đó  không phụ thuộc vào vị trí điểm C.*

***Bài toán 1.8.3:*** *Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Chứng minh:  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.*

*Tiếp tục khai thác bài toán gốc, ta cho dây cung MN cắt đoạn AO tại trung điểm I của AO. Ta được bài toán sau:*

**1.9. Bài toán 1.9:**

|  |  |
| --- | --- |
| Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, dây cung MN vuông góc với AO tại trung điểm I của đoạn AO. Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C.  a) Chứng minh tứ giác AMON là hình thoi.  b) Chứng minh tam giác BMN đều và O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BMN.  c) Chứng minh MB = 3MC. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Ta có MN là đường trung trực của đoạn OA, suy ra AM = OM

Lại có OM = OA = R

Suy ra OA = OM = AM. Do đó tam giác OAM đều.

Tương tự ta có OA = ON = AN.

Suy ra OA = ON = AM = AN  tứ giác AMON là hình thoi.

b) Ta có tam giác OAM đều  

Mà AM = AN  

Suy ra BA là phân giác của .

Tứ giác AMON là hình thoi  MN là phân giác của 

Lại có tam giác OBM cân tại O 

Suy ra   MO là phân giác của 

Xét tam giác BMN có BO là phân giác của , MO là phân giác của 

Suy ra O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BMN.

c) Ta có MB2 + MA2 = AB2 = 4R2  MB2 = 4R2 – MA2 = 4R2 – R2 = 3R2

. Mà MB.MC = MA2  Suy ra MB = 3MC.

Do IM//AC ta cũng có thể vận dụng Định lí Ta-lét để chỉ ra được MB = 3MC.

*Tiếp tục khai thác bài toán này: Gọi P là giao điểm của AC và OM, vẽ đường tròn tâm D ngoại tiếp tam giác CPM, đường tròn này cắt đường tron (O) tại điểm thứ hai là Q. Vẽ đường kính NK của đường tròn (O). Ta có bài toán sau:*

**1.10. Bài toán 1.10:**

|  |  |
| --- | --- |
| Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, dây cung MN vuông góc với AO tại trung điểm I của đoạn AO. Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Gọi P là giao điểm của AC và OM, vẽ đường tròn tâm D ngoại tiếp tam giác CPM, đường tròn này cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. Vẽ đường kính NK của đường tròn (O). Chứng minh:  a) CM = CP.  b) Ba điểm C, Q, K thẳng hàng. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Ta có tam giác AOP vuông tại A, có  hay 

Lại có . Do đó 

Suy ra tam giác CPM cân tại C  CM = CP.

b) Ta có tứ giác MNKQ nội tiếp đường tròn (O) 

Mà  

Ta có tứ giác CMQP nội tiếp đường tròn (D)  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC của đường tròn (D))

Suy ra . Vậy ba điểm C, Q, K thẳng hàng.

*Tiếp tục khai thác bài toán gốc, kẻ đường kính MN của đường tròn (O), gọi D là giao điểm của BN và AC. Ta có bài toán sau:*

****1.11. Bài toán 1.11:**

Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Gọi D là giao điểm của BN và AC.

a) Chứng minh tứ giác AMBN là hình chữ nhật.

b) Chứng minh ∆BMN ∆MAC.

c) Chứng minh tứ giác MNDC nội tiếp được đường tròn.

d) Gọi S, S1, S2 thứ tự là diện tích của ∆BCD, ∆AMC và ∆AND. Chứng minh: .

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Tứ giác AMBN có hai đường chéo AB và MN bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra ACBD là hình chữ nhật.

b) Tứ giác AMBN là hình chữ nhật suy ra: (1). Lại có sđ(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung); sđ(góc nội tiếp chắn cung BN), mà  (do BC = AD) (2). Từ (1) và (2) suy ra ∆BMN ∆MAC

c) Vì AMBN là hình chữ nhật nên MA song song với BD, suy ra: (3). Từ (2) và (3) suy ra  do đó tứ giácCDNM nội tiếp được đường tròn.

d) Do MA // BD nên ∆CMA ∆CBD.

suy ra:  .

Tương tự ta có . Từ đó suy ra: .

*Quay trở lại Bài toán 1, gọi D là giao điểm của BN và đường tròn (O), E là giao điểm của ON và AC. Ta có bài toán sau:*

**1.12. Bài toán 1.12:**

Cho đường tròn (O; R), đường kính AB. Gọi M là một điểm thuộc đường tròn (M khác A, B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Gọi N là trung điểm của AC, D là giao điểm của BN và đường tròn (O), E là giao điểm của ON và AM.

a) Chứng minh 4 điểm A, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh .

c) Vẽ MH  AB (HAB). Chứng minh rằng BN đi qua trung điểm của MH.

|  |  |
| --- | --- |
| *Ta có lời giải bài toán như sau:*  a) Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  (1)  Ta có: OA = OB = R; NA = NC (GT).  ON là đường trung bình của ABC.  ON // BC.  Lại có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  AMBC.  Do đó AMON  (2) |  |

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm A, N, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính AN.

b) Ta có 4 điểm A, N, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính AN.

Suy ra:  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AE) hay .

Lại có  (cùng phụ với ). Do đó .

Mà  (do OAC cân tại O)  .

c) Gọi I là giao điểm của BN và MH.

Ta có MH // AC (cùng vuông góc với AB), do đó MI // CN, IH // AN.

Ta có MI // CN, theo hệ quả của định lý Ta-lét có: 

Ta có IH // AN, theo hệ quả của định lý Ta-lét có:   

Mà CN = AN.

Từ đó suy ra MI = IH hay MB đi qua trung điểm I của MH.

*Trở lại bài toán gốc, khi ta vẽ dây cung  (M thuộc cung AN).*

*Gọi D là giao điểm của AM và BN, E là giao điểm của AN và BM, I là trung điểm của CD. Ta được bài toán sau:*

**5.1.13. Bài toán 1.13:**

Cho đường tròn (O; R), đường kính AB. Gọi M là một điểm thuộc đường tròn (M khác A, B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Vẽ dây cung  (M thuộc cung AN). Gọi D là giao điểm của AM và BN, E là giao điểm của AN và BM, I là trung điểm của DE. Chứng minh:

a) AM = EM, BN = EN.

b) DE = AB và DE song song với một đường thẳng cố định.

c) IM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

|  |  |
| --- | --- |
| a) Ta có   vuông cân tại O  Từ đó suy ra:  (góc nội tiếp chắn cung MN)    Ta lại có  ((góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) |  |

Do đó  vuông cân tại M;  vuông cân tại N.

Từ đó suy ra AM = EM; BN = EN.

b) Ta có AN và BM là hai đường cao của tam giác DB. Do đó E là trực tâm của tam giác ADB. Suy ra DEAB.

Xét  và  có:



AM = EM (CMT)

 (cùng phụ với )

Suy ra  =  (g.c.g) .

Ta có AC là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O). Suy ra ACAB, mà A cố định, do đó tiếp tuyến AC cố định.

Ta lại có DE//AC (cùng vuông góc với AB)

Vậy DE song song với một đường thẳng cố định.

c) Ta có MI là trung tuyến của  vuông tại M 

Lại có 

Từ đó suy ra được  =  (c.c.c)

 (hai góc tương ứng)

Mà , suy ra  hay 

Suy ra IMOM tại M.

Vậy IM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

*Thay đổi dữ kiện Bài toán 12, vẽ dây cung  (M thuộc cung AN). Ta được bài toán như sau:*

**1.14. Bài toán 1.14:**

Cho đường tròn (O; R), đường kính AB. Gọi M là một điểm thuộc đường tròn (M khác A, B). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Vẽ dây cung  (M thuộc cung AN). Gọi D là giao điểm của AM và BN, E là giao điểm của AN và BM, I là trung điểm của DE. Chứng minh:

a) DE song song với một đường thẳng cố định.

b) Tính góc AEB.

c) IM là tiếp tuyến của đường tròn (O)

|  |  |
| --- | --- |
| *Ta có lời giải bài toán như sau:*  a) Ta có AN và BM là hai đường cao của tam giác DB. Do đó E là trực tâm của tam giác ADB. Suy ra DEAB.  Xét  và  có:    AM = EM (CMT)  (cùng phụ với )  Suy ra  =  (g.c.g) . |  |

Ta có AC là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O). Suy ra ACAB, mà A cố định, do đó tiếp tuyến AC cố định.

Ta lại có DE//AC (cùng vuông góc với AB)

Vậy DE song song với một đường thẳng cố định.

b) Với MN = R, ta có tam giác OMN đều 

Ta có  là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn, do đó



c) Ta có MI là trung tuyến của  vuông tại M 

Do đó  cân tại I 

Mà  (cùng phụ với ) và  (tam giác OBM cân tại O)

Suy ra ; mà 

Suy ra  hay . Do đó IMOM tại M.

Vậy IM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

*Tiếp tục thực hiện như vậy, sau đây ta sẽ phát triển tư duy cho học sinh thông qua bài toán 2 như sau:*

**2. Bài toán 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho hình vuông ABCD. Các điểm M, N lần lượt trên các cạnh AD, CD sao cho . AC cắt BN tại F. Chứng minh rằng A, B, F, M cùng thuộc một đường tròn. |  |

*Dựa vào bài toán quỹ tích cung chứa góc ta có lời giải bài toán như sau:*

Theo giả thiết ABCD là hình vuông nên AC là phân giác của góc BA, suy ra .

Tứ giác ABFM có  nên nội tiếp trong một đường tròn. Vậy 4 điểm A, B, F, M cùng thuộc một đường tròn.

Từ kết quả trên ta có thể suy ra  và tứ giác DMFN nội tiếp.

*Ta gọi E là giao điểm của BM và AC. Từ đó ta có bài toán sau:*

**2.1. Bài toán 2.1:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho hình vuông ABCD. Các điểm M, N lần lượt trên các cạnh AD, CD sao cho . AC cắt BM, BN lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng 4 điểm E, F, N, M cùng thuộc một đường tròn. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

Theo kết quả Bài toán 2 ta có . Do đó 4 điểm E, F, N, M cùng thuộc một đường tròn.

*Gọi H là giao điểm của MF và NE. BH cắt MN tại K. Ta chứng minh được BH vuông góc với MN, BK = BA, chu vi tam giác DMN = 2AB. Ta có thể yêu cầu học sinh chứng minh thêm các ý sau:*

+ Chứng minh MN tiếp xúc với một đường tròn cố định.

+ Chứng minh chu vi của tam giác DMN không đổi.

+ Xác định vị trí của M, N để diện tích tam giác BMN có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

*Trên tia đối của tia BC lấy điểm P sao cho BP = DN, ta có bài toán hay và khó như sau:*

**2.2. Bài toán 2.2: (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng. Năm học 2007 - 2008)**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho hình vuông ABCD có AB = 1cm. Gọi M và N là các điểm lần lượt di động trên các cạnh BC và CD của hình vuông, P là điểm nằm trên tia đối của tia BC sao cho BP = DN.  a) Chứng minh rằng tứ giác ANCP nội tiếp.  b) Giả sử DN = x cm (). Tính theo x độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác ANCP.  c) Chứng minh rằng  khi và chỉ khi MP = MN.  d) Khi M và N di động trên các cạnh BC và CD sao cho , tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MAN. |  |

*Phân tích tìm cách giải:*

*Đối với phần a, học sinh dễ dàng chứng minh được. Phần b, ta phải tính được NP. Phần c, mấu chốt của vấn đề là mối quan hệ giữa  với các góc  và  khi* *. Đối với phần d, đây là một trong những dạng toán khó của môn Hình học, ta đặt y = BM () sau đó tính diện tích tam giác MAN bằng một biểu thức chứa x và y sau đó tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức đó. Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Ta chứng minh được , suy ra .

Do đó 

b) Từ giả thiết có CN = 1 - x (cm); CP = 1 + x (cm), suy ra

 (cm)

Vậy độ dài đường tròn cần tìm là  (cm)

c) Ta có  . Mà  (do )

Suy ra 

Do đó  (c.g.c), suy ra MN = MP.

Ngược lại, khi MN = MP ta cũng dễ dàng chứng minh được 

Vậy MP = MN 

d) Đặt y = BM ()

Vì  nên MN = MP, hay 



Từ đó  (do )

Mặt khác , suy ra  . Hay 

Suy ra 

Do đó 

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MAN bằng , đạt được khi và chỉ khi  hoặc ; giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MAN bằng , đạt được khi và chỉ khi.

*Ta khai thác tính chất từ một điểm trên đường chéo hình vuông kẻ các đường vuông góc tới các cạnh hình vuông. Ta có bài toán hay và khó như sau:*

**2.3. Bài toán 2.3:**

Cho hình vuông ABCD, M là một điểm trên đường chéo BD. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, AD.

a) Chứng minh .

b) Chứng minh CM vuông góc với HK.

c) Xác định vị trí của M để diện tích tam giác CHK nhỏ nhất.

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

|  |  |
| --- | --- |
| a) Ta có tứ giác AHMK là hình chữ nhật.  Suy ra MK = AH, MH = AK,  Ta có tứ giác BHMI là hình vuông.  Suy ra MH = MI.  Lại có  vuông cân tại K, nên MK = DK.  Mà DK = CI (tứ giác CDKI là hình chữ nhật)  Do đó MK = CI. Suy ra  (c.g.c) |  |

b) Gọi E là giao điểm của CM và HK. Suy ra 

 Do đó CM vuông góc với HK.

c) Đặt BI = x, BC = a. Ta có SCHK nhỏ nhất khi tổng S = SAHK + SHBC + SKDC lớn nhất.

Ta có 

 S lớn nhất bằng  khi , khi đó I là trung điểm của BC nên M là trung điểm của BD. Suy ra SCHK nhỏ nhất bằng  khi M là trung điểm của BD.

*Đối với bài toán trên ta cần nhớ đến tính chất từ một điểm trên đường chéo hình vuông kẻ các đường vuông góc tới các cạnh hình vuông ta được các hình chữ nhật, hình vuông, tam giác vuông cân.*

**2.4. Bài toán 2.4:**

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho AM = 3MD. Kẻ tia Bx cắt cạnh CD tại I sao cho . Kẻ phân giác BN (N CD) của . Tính diện tích tam giác BMN.

|  |  |
| --- | --- |
| *Đối với bài toán này ta phải tạo ra các tam giác bằng nhau, chính là nghĩ ra việc lấy điểm H trên BI sao cho BH = AB = BC = a. Sau đó ta phải chỉ ra 3 điểm M, H, N thẳng hàng. Sau đó tính HM, HN theo a.*  *Ta có lời giải bài toán như sau:* |  |

Trên tia BI lấy điểm H sao cho BH = a. Khi đó BH = AB = BC nên ta có (c.g.c) và (c.g.c). Do đó MH = AM và NH = CN;  và 

Suy ra M, H, N thẳng hàng, BI vuông góc với MN tại H và MN = AM + NC.

Vậy 

Vì AM = 3MD nên 

Đặt NC = x, áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông MDN, ta có

MN2 = MD2 + DN2

 

Suy ra 

Nếu thay tỉ số  trong đề bài thành  thì giải hoàn toàn tương tự kết quả sẽ là .

*Từ đỉnh A của hình vuông,**bằng cách vẽ các đường vuông góc để tạo ra tam giác vuông cân. Ta được bài toán:*

**2.5. Bài toán 2.5: (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định. Năm học 2011 - 2012)**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho hình vuông ABCD và điểm E di động trên đoạn CD (E khác D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.  a) CMR: , từ đó suy ra tam giác AFK vuông cân.  b) Xác định vị trí của điểm E sao cho độ dài đoạn EK nhỏ nhất. |  |

*Phần b, từ kết quả DK.DE = AD2 = a2 (không đổi), ta vận dụng Bất đẳng thức Cô-si để tìm giá trị nhỏ nhất của EK (vì EK = DE + DK).*

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Vì (cùng phụ với ), .

Do đó  (c.g.c), suy ra AF = AK, mà , nên tam giác AKF vuông cân tại A.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AEK với AD là đường cao, ta có DK.DE = AD2 = a2 (a là độ dài cạnh hình vuông ABCD).

Mắt khác có  .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi DK = DE = a .

Vậy khi E trùng với đỉnh C của hình vuông ABCD thì EK có độ dài ngắn nhất và bằng 2a.

*Bằng cách tạo ra các đoạn thẳng bằng nhau trên các cạnh của hình vuông. Ta có bài toán sau:*

**2.6. Bài toán 2.6:**

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên cạnh AD, DC thứ tự lấy E và F sao cho .

a) So sánh tam giác ABE và tam giác DAF;

|  |  |
| --- | --- |
| b) Chứng minh: AF vuông góc với BE;  c) Tính . |  |

*Phần b, ta đưa về việc chứng minh tam giác có tổng hai góc bằng 900 suy ra là tam giác vuông. Phần c, có thể vận dụng kiến thức về tam giác đồng dạng, tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.*

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Xét  và  có :

AB = DA (cạnh hình vuông) ;  ; AE = DF (gt)

Suy ra  =  (c.g.c)

b) Gọi I là giao điểm của AF và BE.

Ta có  ( = )

Mà  nên  hay 

Từ đó suy ra 

Suy ra AF vuông góc với BE tại I.

c) Áp dụng định lý Pytago cho tam giác ABE vuông tại A có

BE2 = AB2 + AE2 =  

Ta có 

Ta có  (g.g)

 

 

*Từ cách vẽ các đường vuông góc để sử dụng kiến thức về ba đường cao. Ta có bài toán sau:*

**2.7. Bài toán 2.7:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE cắt đường thẳng DE và DC thứ tự ở H và K.  a) Chứng minh tứ giác BHCD nội tiếp;  b) Tính góc CHK;  c) Chứng minh KC.KD = KH.KB;  d) Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào? |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Xét tứ giác BHCD có 

Suy ra tứ giác BHCD nội tiếp.

b) Ta có tứ giác BHCD nội tiếp, suy ra  (cùng bù với )

Mà , suy ra 

c) Ta có  (g.g) 

d) Ta có  (không đổi)

Khi E di chuyển thì H di chuyển nhưng luôn nhìn BD dưới một góc 900.

Do đó khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên cung BC của đường tròn đường kính BD cố định.

*Tiếp tục khai thác cách vẽ vuông góc ta có bài toán sau:*

**2.8. Bài toán 2.8:**

Cho hình vuông ABCD, M là điểm trên cạnh CD (MC, MD). Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với AM tại H, BH cắt AC tại K. Chứng minh rằng:

a) MK luôn song song với một đường thắng cố định khi M chuyển động trên cạnh CD.

|  |  |
| --- | --- |
| b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADMK nằm trên một đường thẳng cố định. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Vì  nên tứ giác AHCB nội tiếp, suy ra  mà  nên .

Suy ra tứ giác MHCK nội tiếp .

Do đó MK  AC mà BD  AC nên MK // BD.

Vậy MK song song với một đường thẳng cố định.

b) Vì  nên tứ giác ADMK nội tiếp đường tròn đường kính AM. Gọi I là tâm của đường tròn đó thì I là trung điểm của AM. Do đó theo tính chất đường trung bình của tam giác AMC, ta có IO // CD (O là tâm hình vuông ABCD. Vậy I luôn nằm trên đường thẳng cố định đi qua điểm O và song song với CD.

*Đối với bài toán này cần chú ý cho học sinh yếu tố cố định (đường cố định là các cạnh hoặc các đường chéo của hình vuông)*

*Khi cho hình vuông nội tiếp một đường tròn rồi lấy một điểm bất kì thuộc đường tròn ta xác định thêm các giao điểm để được hai bài toán sau:*

**2.9. Bài toán 2.9:**

Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M bất kì (M khác B, C). Các đường thẳng CM và DB cắt nhau tại điểm E; các đường thẳng DM và AB cắt nhau tại điểm F. Chứng minh rằng SABE = SDOF.

*Đối với bài toán này ta sử dụng kiến thức về công thức tính diện tích của tam giác, tuy nhiên ta cần chú ý rằng chiều cao AO ứng với cạnh BE của tam giác ABE bằng cạnh OD của tam giác DOE. Như vậy ta phải chứng minh BE = EF thông qua chứng minh tam giác BEF vuông cân tại E.*

|  |  |
| --- | --- |
| *Ta có lời giải bài toán như sau:*  Ta có .  Suy ra nên tứ giác MBEF nội tiếp. Từ đó tính được .  Như vậy tam giác BEF vuông cân tại E.  Ta có BE = EF nên  Vậy SABE = SDOF. |  |

**2.10. Bài toán 2.10:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O), M khác C và D. MA cắt DB, DC lần lượt tại X, Z; MB cắt CA, CD lần lượt tại Y và T; CX và DY cắt nhau tại K.  a) Chứng minh rằng  và .  b) Chứng minh . |  |

*Đối với phần b, cần lưu ý phải chỉ ra các đường thẳng song song hoặc các tam giác đồng dạng để suy ra các tỉ số có cùng mẫu.*

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Do  nên tứ giác XDMT nội tiếp. Mà  nên .

Tam giác AXC có XO là phân giác trong và XO vuông góc với XT, nên XT là phân giác ngoài. Do đó 

Kẻ ME vuông góc với CD (E thuộc đường tròn (O))

Dễ thấy DZ = DV, DZ = AL nên DV = AL. Do đó CV vuông góc với DL.

Tương tự có DY vuông góc với CE.

Do vậy .

b) Ta có 

Mà tứ giác MXOC nội tiếp nên .

Do đó  đồng dạng với . suy ra  (do YZ // OD)

Tương tự 

Do đó 

*Từ tâm O của hình vuông vẽ một góc 450 ta được bài toán sau:*

**2.11. Bài toán 2.11:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm G thuộc cạnh BC, điểm H thuộc cạnh CD sao cho . Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:  a) Tam giác HOD đồng dạng với tam giác OGB.  b) MG // AH. |  |

*Phần b, ta vận dụng kết quả của phần a để suy ra tỉ số đồng dạng sử dụng cho trường hợp (c.g.c)*

*Lời giải:* a) Ta có ; 

Nên  . Do đó  (g.g)

b) Ta có  

Đặt BM = a thì AD = 2a, OB = OD = 

Ta có HD.BG = OB.OD = . = 2a.a = AD.BM

Suy ra 

Dó đó   (c.g.c) 

Suy ra  . Suy ra MG //AH.

*Từ tâm O của hình vuông vẽ một góc 900 ta được bài toán sau:*

**2.12. Bài toán 2.12:**

Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại E. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho: (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông).

a) Chứng minh rằng BIEM là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Tính số đo của góc 

c) Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC; K là giao điểm của BN và tia EM. Chứng minh CKBN.

|  |  |
| --- | --- |
| *Lời giải:*  a) Tứ giác BIEM có: (gt); suy ra tứ giác BIEM nội tiếp đường tròn đường kính IM.  b) Tứ giác BIEM nội tiếp suy ra:  (do ABCD là hình vuông). |  |

c) Xét ∆EBI và ∆ECM có: , BE = CE,  (do )

 ∆EBI = ∆ECM (g-c-g) MC = IB; suy ra MB = IA

Vì CN // BA nên theo định lí Talet, ta có: =.

Suy ra IM song song với BN (định lí Ta-let đảo)

(2). Lại có (do ABCD là hình vuông).

Suy ra BKCE là tứ giác nội tiếp.

 mà ; Do đó  hay .

*Bằng cách vẽ tam giác đều bên trong hình vuông ta có hai bài toán sau:*

**2.13. Bài toán 2.13:**

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trong hình vuông đó lấy điểm K sao cho tam giác ABK đều. Các đường thẳng BK và AD cắt nhau tại P.

a) Tính độ dài đoạn KC theo a.

b) Trên đoạn AD lấy I sao cho  , các đường thẳng CI và BP cắt nhau tại H. Chứng minh tứ giác CHDP nội tiếp một đường tròn.

c) Gọi M và L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CP và KD. Chứng minh 

|  |  |
| --- | --- |
| *Ta có lời giải bài toán như sau:*  a) Kẻ KE vuông góc với BC, khi đó , ,  Từ đó.  b) Trong tam giác vuông CDI có  nên . Mặt khác . Suy ra tứ giác CHDP nội tiếp. |  |

c) Lấy trung điểm Q của đoạn KC. Do tam giác CKD cân tại K và M là trung điểm của CP suy ra L và Q đối xứng nhau qua KM. Do đó ML = MQ. Mà QM là đường trung bình của tam giác CKP nên .

**2.14. Bài toán 2.14:**

Bêntrong hình vuông ABCD vẽ tam giác đều ABE. Vẽ tia Bx thuộc nửa mặt phẳng chứa điểm E, có bờ là đường thẳng AB sao cho Bx vuông góc với BE. Trên tia Bx lấy điểm F sao cho BF = BE.

a) Tính số đo các góc của tam giác ADE.

b) Chứng minh 3 điểm: D, E, F thẳng hàng.

c) Đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác AEB cắt AD tại M. Chứng minh ME // BF.

|  |  |
| --- | --- |
| *Lời giải:*  a) Tam giác ADE cân tại A vì AD = AE.  Lại có: *=*  Do đó . |  |

b) Từ giả thiết, dễ thấy tam giác BEF vuông cân tại B, nên .

Từ đó ta có: ****

Suy ra 3 điểm D, E, F thẳng hàng.

c) Ta có: (cùng chắn cung EM) suy ra  nên .

Mà nên .

Vậy hay MEEB. Mặt khác BFEB do đó ME // BF.

Cứ tiếp tục khai thác như vậy ta được một họ các bài toán có mối liên hệ với nhau, mới thấy được cái hay, cái đẹp của toán học nói chung và môn hình học nói riêng.

Quá trình đi sâu khai thác, phát triển bài toán có ý nghĩa vô cùng tích cực cho việc dạy và học toán. Quá trình này rèn luyện trí thông minh, óc sáng tạo cho học sinh. Sau khi giải xong một bài toán và tìm nhiều cách giải khác, nên tiếp tục sáng tạo: dựa vào bài toán đó mà tự nghĩ ra các bài toán mới. Việc làm này, giúp chúng ta nắm vững mối quan hệ giữa các đại lượng và những quan hệ bản chất trong mỗi bài toán. Từ đó mà học sinh hiểu bài hơn rất nhiều.

**3. Bài tập tự giải:**

**Bài 1:** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax, trên tia Ax lấy các điểm C và D (C nằm giữa A và D). Các tia BC, BD lần lượt cắt đường tròn tại E và F. AE cắt BF tại N, AF cắt BE tại M. Chứng minh:

a) Tứ giác EMFN nội tiếp.

b) Tứ giác CDFE nội tiếp.

**Bài 2:** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax, trên tia Ax lấy điểm M sao cho AM = R. Vẽ tiếp tuyến MC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BC tại D.

a) Chứng minh BD // OM

b) Xác định dạng của tứ giác OBDM và AODM.

c) Gọi E là giao điếm của AD và OM, F là giao điểm của MC và OD. Chứng minh EF là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Bài 3:** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi d1 và d2 lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua điểm E và vuông góc với EI cắt d1, d2 lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh AMEI là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh  và 

c) Chứng minh AM.BN = AI.BI

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O). Tính diện tích tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

**Bài 4:** Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Một điểm M di động trên cung ADC, MB cắt AC ở P.

a) Chứng minh rằng MB là phân giác của góc AMC, và các tam giác MBC, MAP đồng dạng.

b) Các tam giác MBC và MAP bằng nhau khi M ở một vị trí đặc biệt M’.

c) Tia M’B cắt AC ở P’. Tính các góc của tam giác M’P’C.

**Bài 5:** Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N và P là ba điểm lần lượt lấy trên các cạnh BC, CD và AD sao cho MNP là một tam giác đều.

a) Chứng minh CN2 - AP2 = 2DP.BM

b) Hãy xác định vị trí các điểm M, N và P sao cho tam giác MNP có diện tích nhỏ nhất.

c) Chứng minh tam giác MNP có diện tích lớn nhất khi M trùng với B hoặc khi P trùng với A.

**Bài 6:** Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M nằm trong hình vuông sao cho. Chứng minh tam giác MCD đều.

**Bài 7:** Cho hình vuông ABCD, M là điểm thay đổi trên cạnh BC (M không trùng với B) và N là điểm thay đổi trên cạnh CD (N không trùng với D) sao cho: .

a) BD cắt AN và AM tương ứng tại P và Q. Chứng minh 5 điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M, N thay đổi.

c) Gọi S1 là diện tích của tam giác APQ, S2 là diện tích của tứ giác PQMN. CMR tỉ số  không đổi khi M, N thay đổi.

**Bài 8:** Cho hình vuông ABCD và điểm P nằm trong tam giác ABC.

a) Giả sử góc BPC bằng 1350. Chứng minh 2PB2 + PC2 = PA2.

b) Các đường thẳng AP, CP cắt các cạnh BC, BA tương ứng tại các điểm M và N. Gọi Q là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn MN.

Chứng minh khi P thay đổi trong tam giác ABC thì đường thẳng PQ luôn đi qua D.

**Bài 9:** Cho hình vuông ABCD có cạnh AB = a. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho MN//AC, PQ//AC và góc AMQ bằng 300.

Gọi A’ là điểm đối xứng với A qua đường thẳng MQ, C’ là điểm đối xứng với C qua đường thẳng NP. Giả sử đường thẳng QA’ cắt đoạn thẳng NP tại E, đường thẳng PC’ cắt đoạn thẳng MQ tại F.

b) Chứng minh 5 điểm E, F, Q, D, P cùng thuộc một đường tròn.

b) Biết AC = 3MN, tính diện tích hình thang MNPQ theo a.

**Bài 10:** Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 2cm. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AD, DC. Gọi I, H thứ thự là giao điểm của AF với BE, BD. Vẽ  (M thuộc cạnh BC), O là giao điểm của IM và BD.

a) Tính độ dài của AI, BI.

b) Chứng minh 4 điểm B, I, H, M cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh DH.BO = OH.BD.

**II. PHẦN II: Phát triển tư duy học sinh từ một bài tập hình học lớp 8**

**1. Bài toán 1:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b,  AB = c. Các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại O.  Tính BD, DC. |  |

*Sử dụng tính chất đường phân giác trong tam giác và tính chất của tỉ lệ thức để làm xuất hiện BD + DC = BC, ta có lời giải bài toán như sau:*

Ta có AD là đường phân giác của nên



Suy ra 

Do đó 

Chứng minh tương tự ta có:



*Áp dụng tính chất các đường phân giác trong tam giác ABC, ta có bài toán sau:*

**1.2. Bài toán 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại O. Chứng minh: |  |

Ta có AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác ABC nên:



Suy ra 

*Khi cho b > c. Ta có bài toán sau:*

**4.3. Bài toán 3:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c (b > c). Các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại O.  Chứng minh CE > BF. |  |

Theo kết quả bài toán trên ta có ; mà b > c nên



Do đó ta có CE > BF.

*Tiếp tục để ý đến tỉ số AO : OD . Ta có bài toán sau:*

**4.4. Bài toán 4:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại O.  Tính tỉ số AO : OD. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

Ta có BO là đường phân giác của nên

AO : OD = AB : BD = 

*Nếu ta cho thêm tính chất . Từ đó ta có bài toán sau:*

**4.5. Bài toán 5:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại O và . Chứng minh tam giác ABC vuông tại A. |  |

Theo kết quả bài toán 1, ta tính được **

Theo kết quả bài toán 1.3, ta tính được **

Tương tự **

Từ giả thiết ta có **

**

Từ đó suy ra được a2 = b2 + c2 nên tam giác ABC vuông tại A.

*Nếu ta cho BC bằng trung bình cộng của AB và AC; gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có bài toán sau:*

**4.6. Bài toán 6:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại O. Cho BC bằng trung bình cộng của AB và AC, gọi G là trọng tâm của tam giác ABC  a) Chứng minh OG // BC.  b) Tính OG khi AB = 8cm, AC = 12cm,  BC = 10cm. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Theo kết quả bài toán 1.2 có . Mà 

Suy ra 

Lại có  (M là trung điểm của BC)

Do đó , theo hệ quả của định lý Ta-lét suy ra OG // DM hay OG // BC.

b) Vì AD là đường phân giác của tam giác ABC nên:



(cm)

Lại có BM = BC: 2 = 10 : 2 = 5 (cm)

Suy ra DM = BM – BD = 5 – 4 = 1 (cm)

Ta có OG // DM, G là trọng tâm của tam giác ABC nên:



 (cm)

*Khi cho ba cạnh AB, AC, BC bằng những số đo cụ thể và kẻ DE song song với AB. Ta có bài toán sau:*

**4.7. Bài toán 7:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có AB = 12cm, AC = 20cm, BC = 28cm. Đường phân giác của góc BAC cắt BC tại D. Qua D kẻ DE // AB (E thuộc cạnh AC)  a) Tính BD, DC và DE.  b) Tính diện tích các tam giác ABD, ADE và DCE theo diện tích tam giác ABC. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Vì AD là đường phân giác của tam giác ABC nên:



 

(cm)

(cm)

Lại có DE //AB

(cm)

b) Ta có 

Tương tự 

Vì DE // AB và AD là đường phân giác góc BAC nên AE = DE.





Ta có 

*Đặc biệt hóa bài toán trên, khi cho tam giác ABC vuông tại A, ta có bài toán sau:*

**4.8. Bài toán 8:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 15cm, AC = 20cm. Đường phân giác của góc BAC cắt BC tại D.  a) Tính BD, DC.  b) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ABD và ACD. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Áp dụng định lý Pytago cho tam giác ABC vuông tại A có:

BC2 = AB2 + AC2 = 152 + 202 = 625

 BC = 25(cm)

Vì AD là đường phân giác của tam giác ABC nên:



 

(cm)

(cm)

b) Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC).

Ta có 

*Từ bài toán trên, vẽ thêm trung tuyến AM, ta có bài toán sau:*

**4.9. Bài toán 9:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a(cm), AC = b(cm), (a < b), phân giác AD, trung tuyến AM. Tính BC, BD, DC, AM, DM theo a và b. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

Theo giả thiết a < b, nên dễ thấy DB < DC. Từ đó suy ra D nằm giữa B và M.

Tam giác ABC vuông ở A, do đó ta có:

BC2 = AB2 + AC2 = a2 + b2 

Đặt  = c

AD là đường phân giác của tam giác ABC, nên ta có:

 hay 

Suy ra  ; 

. 

*Tiếp tục khai thác, ta có bài toán sau:*

**4.10. Bài toán 10:**

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Các đường phân giác trong của tam giác cắt nhau tại I. Gọi M, N, P lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ I đến AB, BC, AC. Gọi K là giao điểm của AD và NP.

a) Chứng minh tứ giác AMIP là hình vuông.

b) Chứng minh 

c) Gọi E là giao điểm của BI và AC, F là giao điểm của CI và AB. Chứng minh: BE.CF = 2BI.CI.

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

a) Xét tứ giác AMIP có

. Do đó AMIP là hình chữ nhật.

Lại có I là giao điểm của ba phân giác, do đó AI là phân giác của .

Suy ra AMIP là hình vuông.

b) Chứng minh được (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra CP = CN  cân tại C.

Ta có  = 1800 -  -  = 1800 - 450 - (1800 - )

=  - 450

= (1800 - ):2 – 450 = 450 -  (1)

Lại có  =  =  (900 - ) = 450 -  (2)

Từ (1) và (2) suy ra 

c) Chứng minh tương tự phần b, ta được (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra BM = BN

Chứng minh tương tự phần b, ta được (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra AM = AP

Đặt BC = a, AC = b, AB = c

Ta có a + b + c = 2BM + 2AP + 2CP

 a + b + c = 2BM + 2(AP + CP)

 a + b + c = 2BM + 2AC

 a + b + c = 2BM + 2b

 BM = 

Tương tự CP = 

Ta có MI // AE (cùng vuông góc với AB), theo định lí Ta-let có:  = 

Ta có IP // AF (cùng vuông góc với AC), theo định lí Ta-let có:  = 

Suy ra =  =  = 

=  = 

Suy ra BE.CF = 2BI.CI.

**4.11. Bài toán 11:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có AB = AC = a, BC = b. Đường phân giác của góc B cắt AC tại M, đường phân giác của góc C cắt AB tại N.  a) Chứng minh MN // BC  b) Tính MN theo a, b. |  |

a) Ta có BM và CN là các đường phân giác của tam giác ABC nên:

 (1);  (2)

Suy ra   MN // BC (Theo định lý Ta-lét đảo)

b) Từ hệ thức (1), ta có  hay 

Suy ra 

Vì MN // BC 



\* Khi ta cho a, b bằng những số cụ thể ta sẽ tính ngay được MN, chẳng hạn cho a = 12cm, b = 4cm thì ta tính được MN = 3cm.

*Tiếp tục khai thác bài toán nếu ta cho BC = 5cm, AC = 20cm. Ta sẽ tính được BM, CN, từ đó ta có bài toán sau:*

**4.12. Bài toán 12:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có AB = AC = 20cm, BC = 5cm. Đường phân giác của góc B cắt AC tại M, đường phân giác của góc C cắt AB tại N.  Tính BM, CN. |  |

*Ta có lời giải bài toán như sau:*

Gọi E là giao điểm của BM và CN. Đặt BE = x, EM = y. Ta có BM = CN

và CE = x.

Vì BM là phân giác của tam giác ABC nên:

**

**(cm)

Ta có  và  đồng dạng (g.g)



Suy ra BM2 = 4.9 = 36, nên BM = 6(cm) = CN.

*Tiếp tục suy xét ta thấy , từ đó ta có bài toán sau:*

**4.13. Bài toán 13:**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho tam giác ABC có .  a) Tính AC biết AB = 4cm, BC = 5cm.  b) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng số đo các cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp. |  |

Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho BD = BC.

Ta có  và  đồng dạng (g.g)



Suy ra AC = 6(cm)

b) Theo câu a, ta có AC2 = AB.AD = AB.(AB + BC)

Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Ta có b2 = c.(c + a) = c2 + ac (1)

Ta có b > c (do **) nên chỉ có hai khả năng là b = c + 1 hoặc b = c + 2.

Nếu b = c + 1 thì từ (1) suy ra (c + 1)2 = c2 + ac **

**, loại vì c =1, a = 3, b = 2 không là các cạnh của một tam giác.

Nếu b = c + 2 thì từ (1) suy ra (c + 2)2 = c2 + ac **

**

Xét c = 1, 2, 4; chỉ có c = 4, a = 5, b = 6 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cứ tiếp tục khai thác như vậy ta được một họ các bài toán có mối liên hệ với nhau, mới thấy được cái hay, cái đẹp của toán học nói chung và môn hình học nói riêng.

Quá trình đi sâu khai thác, phát triển bài toán có ý nghĩa vô cùng tích cực cho việc dạy và học toán. Quá trình này rèn luyện trí thông minh, óc sáng tạo cho học sinh. Sau khi giải xong một bài toán và tìm nhiều cách giải khác, nên tiếp tục sáng tạo: dựa vào bài toán đó mà tự nghĩ ra các bài toán mới. Việc làm này, giúp chúng ta nắm vững mối quan hệ giữa các đại lượng và những quan hệ bản chất trong mỗi bài toán. Từ đó mà học sinh hiểu bài hơn rất nhiều.

**4.3. Bài tập tự giải:**

**Bài 1:** Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 21cm, AC = 28cm. Đường phân giác của góc BAC cắt BC tại D. Qua D kẻ DE // AB (E thuộc cạnh AC)

a) Tính BD, DC và DE.

b) Tính diện tích các tam giác ABD, ACD.

**Bài 2:** Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c (b > c). Các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại O.

a) Tính CD, BE rồi suy ra CD > BE.

b) Vẽ hình bình hành BEKD. Chứng minh CE > EK.

c) Chứng minh CE > BD.

**Bài 3:** Trong tam giác ABC, đường phân giác AD chia cạnh đối diện thành các đoạn thẳng BD = 2cm, DC = 4cm. Đường trung trực AD cắt đường thẳng BC ở K. Tính KD.

**Bài 4:** Cho hình bình hành ABCD. Tia phân giác của góc BAD cắt BD ở M, tia phân giác của góc ABC cắt AC ở N. Chứng minh MN // CD.

**Bài 5:** Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Các tia phân giác của các góc AMB, AMC cắt AB, AC thứ tự ở D và E.

a) Chứng minh DE // BC.

b) Cho BC = a, AM = m. Tính DE.

c) Giao điểm I của AM và DE chuyển động trên đường nào nếu tam giác ABC có BC cố định, trung tuyến AM = m không đổi.

d) Tam giác ABC có thêm điều kiện gì để DE là đường trung bình của tam giác đó.

**Bài 6:** Tính diện tích tam giác ABC, biết AB = 14cm, AC = 35cm, đường phân giác AD = 12cm.

**6. Kết quả đạt được**

Khi áp dụng chuyên đề học sinh có hứng thú hơn trong học tập, tích cực chủ động nắm bắt kiến thức, biết liên hệ với những bài toán cùng dạng, tìm tòi phát triển bài toán. Kết quả kiểm tra thường xuyên, kiểm tra định kì, kiểm tra học kì và thi vào THPT được nâng lên. Trong những năm qua những lớp 9 mà tôi phụ trách ôn thi vào THPT đều đỗ với tỉ lệ cao vào hệ công lập, còn có những học sinh thi đỗ vào THPT chuyên với điểm bộ môn toán cao, trong đó câu hình hầu như học sinh đều làm được. Chính vì vậy mà thứ hạng thi vào THPT của nhà trường thường xuyên đứng trong tốp đầu của tỉnh.

**7. Điều kiện để chuyên đề được nhân rộng**

Đối với những tiết dạy hàng ngày trên lớp, do thời gian không nhiều nên khi áp dụng sáng kiến ta nên dừng lại ở việc định hướng, gợi mở cho học sinh về nhà tiếp tục phát triển. Đối với những buổi ôn tập, bồi dưỡng nên triệt để áp dụng sáng kiến theo các giải pháp đã nêu. Sáng kiến không chỉ áp dụng cho đối tượng học sinh lớp 9 mà có thể áp dụng cho mọi đối tượng học sinh THCS. Và áp dụng cho nhiều dạng bài tập khác.

- Với đối tượng học sinh trung bình trở xuống khả năng lĩnh hội kiến thức, tư duy, nhận thức chậm nên sự chuyển tải kiến thức rất khó khăn. Do vậy cần có thời gian và phải vận dụng linh hoạt, thường xuyên, kiên trì và cần có nhiều tài liệu tham khảo liên quan.

- Muốn phát triển tư duy học sinh từ việc khai thác từ kết quả một bài toán, bản thân giáo viên phải thường xuyên thực hiện điều đó, liên tục tự tìm tòi, nghiên cứu, học hỏi kinh nghiệm qua đồng nghiệp, sách, báo và đặc biệt là qua các trang Web có liên quan...; giáo viên cần có sự chủ động, có kế hoạch trong từng ngày, từng giờ lên lớp.

- Việc khai thác, phát triển từ bài toán quen thuộc đã biết, giúp cho học sinh định hướng tìm ra lời giải một bài toán hình học là một vấn đề rất quan trọng và không thể thiếu được trong công tác dạy học toán nói chung và dạy học hình học nói riêng. Phong trào viết chuyên đề trong các trường học là một phong trào có tác dụng tốt, rất có ý nghĩa, đặc biệt là trong xu thế thời đại đang rất cần sự sáng tạo, chủ động, tích cực trên mọi lĩnh vực công tác hiện nay.

**KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ**

**1. Kết luận**

Qua nhiều năm giảng dạy bộ môn Hình học, đặc biệt là bộ môn Hình học 9 tôi đều hướng dẫn học sinh thực hiện theo cách làm như trên. Học sinh từ chỗ biết cách chứng minh hình học đến có hứng thú và thích học môn Hình học. Từ chỗ các em nắm được cách chứng minh bài toán khi thầy hướng dẫn đến biết tự suy luận để tìm ra hướng giải bài toán. Học sinh biết cách phát hiện những kiến thức khác ngoài những yêu cầu bài toán đã cho, tự đưa ra những yêu cầu mới, biết làm các bài toán tương tự.

Qua quá trình hướng dẫn học sinh giải và khai thác các bài tập hình học, tôi tự rút ra kết luận sau:

- Dù là một dạng bài tập nào và khó đến đâu người giáo viên cần cung cấp cho học sinh nắm rõ khái niệm vấn đề cần nghiên cứu là gì. Người giáo viên cần đưa ra kiến thức có liên quan đến bài toán và phân tích, định hướng giải cụ thể, dễ hiểu nhằm giúp các em bớt căng thẳng khi gặp những bài tập khó và nhìn nhận nó nhẹ nhàng hơn.

- Hướng dẫn học sinh phân tích đầu bài, phán đoán cách giải để chọn phương pháp giải cho phù hợp và hiệu quả nhất.

- Rèn kỹ năng giải bài tập cho học sinh thông qua nhiều bài tập và khác nhau và thường xuyên kiểm tra sửa chữa những sai lầm cho các em.

- Sau khi đã tìm được lời giải bài toán, dù là đơn giản hay phức tạp, cần tiếp tục suy nghĩ, lật lại vấn đề để tìm kết quả mới hơn. Tìm được cái mới hơn rồi, lại tiếp tục đi tìm cái mới hơn nữa hoặc đi tìm mối liên hệ giữa các kiến thức, . . . cứ như thế chúng ta sẽ tìm ra được những kết quả thú vị.

- Sau khi áp dụng chuyên đề vào giảng dạy đa số học sinh không những nắm vững cách giải các bài tập hình học mà còn vận dụng linh hoạt trong các dạng bài tập toán đại số. Cụ thể trong các kì thi vào trung học phổ thông từ năm 2010 đến nay học sinh ở các lớp tôi dạy ôn thi tỉ lệ học sinh đạt điểm từ 7 trở lên cao, chỉ có một vài em điểm dưới trung bình.

- Kết quả quá trình nghiên cứu: Sau khi trắc nghiệm một số đối tượng học sinh tôi đã thu được một số kết dưới đây:

+ Học sinh không ngại khi gặp dạng bài tập hình học có liên quan đến những kiến thức khó.

+ Nhiều học sinh khi hỏi có trả lời rất hứng thú giải bài tập hình học và đã biết cách phát triển bài toán thành nhiều bài toán có liên quan.

**2. Khuyến nghị**

- Đối với tổ, nhóm chuyên môn cần đưa các buổi sinh hoạt chuyên môn đi vào chiều sâu và hiệu quả, tích cực đổi mới sinh hoạt chuyên môn theo nghiên cứu bài học, theo chuyên đề, thông qua kiểm tra và dự giờ giáo viên.

- Đối với nhà trường cần chỉ đạo sát việc đổi mới phương pháp giảng dạy, đổi mới kiểm tra đánh giá của giáo viên; chỉ đạo tổ chuyên môn hoạt động hiệu quả; chỉ đạo có hiệu quả các đợt hội giảng, hội thi giáo viên giỏi, làm tốt công tác bồi dưỡng giáo viên …

- Đối với Phòng GD&ĐT nhân rộng các chuyên đề hình học nói riêng và bộ môn toán nói chung, phổ biến những sáng kiến hay có khả năng áp dụng tốt cho đội ngũ giáo viên.

Qua thực tế nhiều năm giảng dạy và trao đổi với đồng nghiệp tôi đã viết chuyên đề **“Phát triển tư duy học sinh từ một bài tập hình học”.** Tuy nhiên chuyên đề tôi viết chưa thể khai thác hết những kiến thức có liên quan từ một bài tập. Với chuyên đề này ta có thể vận dụng khi hướng dẫn học sinh giải các bài tập khác nhau của phần hình nói riêng và bộ môn Toán nói chung …

Rất mong các bạn đồng nghiệp đóng góp ý kiến để chuyên đề của chúng tôi được áp dụng một cách có hiệu quả nhất. Tôi xin chân thành cảm ơn!

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **STT** | **Tài liệu** | **Tên tác giả** |
| 1 | Sách giáo khoa Toán 9 | NXB GD |
| 2 | Sách bài tập Toán 9 | NXB GD |
| 3 | Toán phát triển 9 | Nguyễn Đức Tấn |
| 4 | Toán học và tuổi trẻ |  |
| 5 | Một số tạp chí và các đề thi HSG, thi vào THPT, … |  |

**Mục lục**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **STT** | **Nội dung** | **Trang** |
| 1 | 1. Lí do chọn đề tài | 1 |
| 2 | 2. Mục đích, đối tượng, phạm vi, phương pháp nghiên cứu | 2 |
| 3 | 3. Cơ sở lí luận của vấn đề | 4 |
| 4 | 4. Thực trạng của vấn đề | 4 |
| 5 | 5. Giải pháp thực hiện | 4 |
|  | *PHẦN I : Phát triển tư duy học sinh từ một bài tập hình học lớp 9* |  |
| 6 | Bài toán 1 | 5 |
| 7 | Bài toán 2 | 20 |
| 8 | Bài tập tự giải | 32 |
|  | *PHẦN II : Phát triển tư duy học sinh từ một bài tập hình học lớp 8* |  |
| 9 | Bài toán 1 | 35 |
| 10 | Bài tập tự giải | 44 |
| 11 | 6. Kết quả đạt được | 46 |
| 12 | 7. Điều kiện để sáng kiến được nhân rộng | 46 |
| 13 | Kết luận và khuyến nghị | 47 |
| 14 | Tài liệu tham khảo | 49 |